有限群論と計算機 (数値解析の基礎理論)

榎本, 彦衛

数理解析研究所講究録
107巻 1971年 59-62

有限群論と計算機

東大理　榎本彦衛

この2,3年の間に新しい有限単純群が10個以上も見つかっていますが，それらのうちのいくつかについては，計算機が重要な役割を果しています．特定の群を1つ決めれば，位数は有限なので，計算機が使えるのはもっともなわけですが，最近見つかった単純群の中には，位数が $2^{22}\cdot3^{16}\cdot5^{2}\cdot7^{3}\cdot11\cdot13\cdot17\cdot23\cdot29$ などという大きなものもあるので，いろいろ工夫が必要となり，必ずしも簡単にはいきません．

(1) Coset enumeration

群はその生成系と基本関係式を与えれば，一意的に決まるわけですが，基本関係式だけでは構造は簡単にはわかりません．たとえば，その群が有限になるかどうか，特に位数がいくらになるかということすら簡単にはわかりません．しかし，生成系と基本関係式を与えたとき，その群の位数を求めるということは，原理的には機械的計算でできるということがわか

っています．つまり，位数および基本関係式がすでにわかっている比較的大きな部分群をとってきて，その部分群による剰余類の代表元をすべて見つけてこようというわけです．すでに外国では，このプログラムができているらしく，Higman-McKayの単純群（位数 $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$）やHeldの単純群（位数 $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$）の存在証明は今のところ計算機によるものだけのようです．このcoset enumerationというのは，今まである剰余類に生成元をかけていくことにより，次々と新しい剰余類をつくっていき，基本関係式を使って一致する剰余類を消していき，新しい剰余類がつくれなくなったら，全部求まったことになるわけです．つまり，これらの剰余類による生成元の置換表現を同時につくっていくわけですが，一般には剰余類の数（i.e. 部分群の指数）はかなり大きくなるし，途中の段階では，余分な剰余類を覚えておかなくてはならないので，記憶容量なども問題になります．

(2) character tableの計算

character tableというのは，有限群の最も基本的な量で，これがわかっていると，部分群についていろいろいうことができます．特に，部分群があると，その剰余類による置換表現ができるわけですが，その指標(i.e. 置換指標）にはいろいろの条件がつくので，（例えば，置換指標というのは固定点の

数だから、非負整数になる e.t.c.）ある種の部分群が存在しないということが、容易にいえることがあります。例えば、(1)で述べた Higman-McKay の群の場合には、部分群の候補者をしぼっていって、その中の1つから実際に拡大してみせたわけです。（置換指標の候補者をしらみつぶしに調べることにも計算機が使われています。）

character table を計算する一般的方法は見つかっていないので、case by case しか手がないわけですが、対称群のように機械的に計算する方法のわかっているものは、記憶容量と計算速度だけが問題で、現在では26次位までは計算されているそうです。一般には部分群からの誘導指標と呼ばれるものをたくさんつくり、それらの内積をもとめて、既約指標への分解を決定し、逆に解いて既約指標をもとめるということをやるわけです。指標 φ_i $(i=1,\cdots,n)$ が与えられたとき、これらの既約指標 χ_k $(k=1,\cdots,r)$ への分解を決定するというのは、$(\varphi_i,\varphi_j)=a_{ij}$ とするとき、

$$\sum_{k=1}^{r} m_{ik}m_{jk}=a_{ij}$$

という方程式の非負整数解 m_{ik} を、順序を除いて全部求めることで、このとき $(\varphi_i,\chi_k)=m_{ik}$ となります。この計算をやってくれるプログラムを作ること自体はそんなに難しくない

と思います．指標の内積を計算してくれるプログラムは愛用していますが，今のところ整数しか扱えません．Weyl群（特に対称群）のように，指標がすべて整数のものにはこれで十分ですが、一般には円分体（有理数体に1のべき根を添加して拡大した体）での計算が必要になります．原理的には拡大の基底をとっておけば，その係数は整数になりますから，整数しか扱わなくてすむわけですが、それではすぐ記憶容量が足りなくなるので，どうしようか悩んでいるところです．

なお，共役類と忠実な表現の指標を1つ与えると、character tableを自動的に計算してくれるプログラムが，外国ではできているということですが、一意的に決まるのかどうか、とかどの程度の大きさの群に使えるのかというようなことは知りません。